COLEGIUL NAŢIONAL
„VASILE LUCACIU”
BAIA MARE



**Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”**
**ediţia a XIV-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019**
**CLASA a X-a**

**Subiectul 1.**

Fie $a, b \in (0,1)$ astfel încât $\sqrt[3]{a} - b = \sqrt[3]{b} - a$ și $a + 1 = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2(1-b)}$ .

**a)** Arătați că $a = b$.

**b)** Determinați numerele $a$ și $b$.

**Subiectul 2.**

**a)** Fie $x \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$. Arătați că $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

**b)** Demonstrați că $\sqrt[n]{\sqrt{5} - 2} + \sqrt[n]{\sqrt{5} + 2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

**Subiectul 3.**

Funcția $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ verifică simultan condițiile:

**a)** $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall\, x, y \geq 0$

**b)** Mulțimea $\{x \mid f(x) = 0, x \in [0, \infty)\}$ este finită.

Arătați că $f$ este injectivă.

**Subiectul 4.**

Fie $p, q \in \mathbb{C}, q \neq 0$. Știind că $z_1, z_2$ sunt rădăcinile ecuației $z^2 + pz + q^2 = 0$ și au același modul, demonstrați că

$$\left|\frac{p}{q}\right| \in [0,2].$$

Notă:

1) Timp de lucru 3h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

COLEGIUL NAȚIONAL VASILE LUCACIU

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro

**Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”**
**ediţia a XIV-a, Baia Mare, 16 noiembrie 2019**
**BAREM DE CORECTARE CLASA A X-A**

**Subiectul 1.**

Fie $a, b \in (0,1)$ astfel încât $\sqrt[3]{a} - b = \sqrt[3]{b} - a$ și $a + 1 = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2(1-b)}$ .

**a)** Arătați că $a = b$.

**b)** Determinați numerele $a$ și $b$.

**Soluție:**

**a)** Din $\sqrt[3]{a} - b = \sqrt[3]{b} - a \Rightarrow \sqrt[3]{a} + a = \sqrt[3]{b} + b$ ........................................................**1p**

Considerăm funcția $f: (0,1) \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x} + x$. ..................................................**1p**

Funcția $f$ este strict crescătoare , deci injectivă. Cum $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$...................**1p**

**b)** $a + 1 = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2(1-b)} \overset{a=b}{\Longleftrightarrow} a + 1 = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2(1-a)}$.............................................**1p**

Din inegalitatea mediilor avem $m_g \leq m_a \Rightarrow$

$\sqrt[3]{a^2(1-a)} = \sqrt[3]{a \cdot a \cdot (1-a)} \leq \frac{a+a+(1-a)}{3} = \frac{a+1}{3}$.....................................................**2p**

Avem egalitate pentru $a = 1 - a \Rightarrow a = \frac{1}{2} \in (0,1)$.........................................................**1p**

**Subiectul 2.**

**a)** Fie $x \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$. Arătați că $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

**b)** Demonstrați că $\sqrt[n]{\sqrt{5}-2} + \sqrt[n]{\sqrt{5}+2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

**Soluție:**

**a)** Demonstrăm prin inducție matematică. Din ipoteză avem că $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$.

Presupunem că $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}, x^2 + \frac{1}{x^2} \in \mathbb{Q}, \ldots, x^k + \frac{1}{x^k} \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}^*$ și demonstrăm că $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \in \mathbb{Q}$.

Cum $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) \in \mathbb{Q}$ și $x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) \Rightarrow$

$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ ................................................**3p**

**b)** Fie $x = \sqrt[n]{\sqrt{5}-2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt[n]{\sqrt{5}-2}} = \sqrt[n]{\sqrt{5}+2}$. ........................................................**1p**

Presupunem prin absurd că $\sqrt[n]{\sqrt{5}-2} + \sqrt[n]{\sqrt{5}+2} \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}$

$\overset{a)}{\Rightarrow} x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{5} - 2 + \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} + 2 = 2\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$, ceea ce este fals. ......**2p**

Deci presupunerea făcută este falsă $\Rightarrow \sqrt[n]{\sqrt{5}-2} + \sqrt[n]{\sqrt{5}+2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$....**1p**

**Subiectul 3.**

Funcția $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ verifică simultan condițiile:

**a)** $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall\, x, y \geq 0$

**b)** Mulțimea $\{x \mid f(x) = 0, x \in [0, \infty)\}$ este finită.

Arătați că $f$ este injectivă.

**Soluție:**

Pentru $x = y = 0 \overset{a)}{\Rightarrow} f(0) = 0$................................................................................................**1p**

Presupunem că $f$ nu este injectivă $\Rightarrow \exists a, b \in [0, \infty)$, astfel încât $a > b$ și $f(a) = f(b)$......**1p**

Atunci $f(a) = f\big((a - b) + b\big) = f(a - b) + f(a)$ (conform a)) $\Rightarrow$ $f(a - b) = 0$.

Notăm $a - b = c \Rightarrow f(c) = 0$.................................................................................................**2p**

Atunci $f(2c) = 0, f(2^2c) = 0$ și inductiv $f(2^n c) = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$ . Contradicție cu b).

Așadar $f$ este injectivă...............................................................................................................**3p**

**Subiectul 4.**

Fie $p, q \in \mathbb{C}, q \neq 0$. Știind că $z_1, z_2$ sunt rădăcinile ecuației $z^2 + pz + q^2 = 0$ şi au același modul, demonstrați că

$$\left|\frac{p}{q}\right| \in [0{,}2].$$

**Soluție:**

Fie $z_1, z_2$ rădăcinile ecuației , conform ipotezei, $|z_1| = |z_2| = r \Rightarrow$

$\begin{cases} z_1 + z_2 = -p \\ z_1 \cdot z_2 = q^2 \end{cases}$ și $z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = r^2$ ..........................................................................**1p**

$\Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{(z_1+z_2)^2}{z_1 \cdot z_2} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2$ ...........................................................................................**1p**

Dar $\frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{r^2}$ și $\frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_2}}{r^2} \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = \frac{z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}}{r^2} + 2 = \frac{2Re(z_1\overline{z_2})}{r^2} + 2 \in \mathbb{R}$ ....................................**1p**

Dacă $z_1 = a + bi$ și $z_2 = c + di$ cu $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow |Re(z_1\overline{z_2})|^2 = (ac + bd)^2$................**1p**

Conform inegalității lui Cauchy-Buniakowski-Schwartz avem

$|Re(z_1\overline{z_2})|^2 = (ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2+d^2) = r^4 \Rightarrow |Re(z_1\overline{z_2})| \leq r^2$......................**2p**

$\frac{|Re(z_1\overline{z_2})|}{r^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{2|Re(z_1\overline{z_2})|}{r^2} \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \frac{2Re(z_1\overline{z_2})}{r^2} \leq 2 \;\Big|\; +2 \Rightarrow$

$0 \leq \frac{p^2}{q^2} \leq 4 \Rightarrow \left|\frac{p}{q}\right| \in [0{,}2]$. ...................................................................................**1p**